



(Einleitung.)

§1. Einführung in die ^{Fragen}Fragestellung.

Der Stand der Forschungen im Gebiete der Grundlagen der Mathematik, an den unsere Ausführungen anknüpfen, wird durch die Ergebnisse von dreierlei Untersuchungen gekennzeichnet:

1. der Ausbildung der axiomatischen Methode, insbesondere an Hand der Grundlagen der Geometrie,
2. der Begründung der Analysis nach der heutigen strengen Methode durch die Zurückführung der Größenlehre auf die Lehre von Zahlen und Zahlenmengen,
3. der Untersuchungen zur Grundlegung der Zahlen- und Mengenlehre.

Was zunächst die axiomatische Methode betrifft, so wird der Terminus "axiomatisch" teils in weiterem, teils in engerem Sinne gebraucht. In der weitesten Bedeutung des Wortes nennen wir die Entwicklung einer Theorie axiomatisch, wenn die Grundbegriffe und Grundvoraussetzungen als solche an die Spitze gestellt werden und aus ihnen der weitere Inhalt der Theorie mit Hilfe von Definitionen und Beweisen logisch abgeleitet wird. In diesem Sinne ist die Geometrie von EUKLID, die Mechanik von NEWTON, die Thermodynamik von CLAUSIUS begründet worden.

Eine Verschärfung, welche ^{in der neueren Zeit, und insbesondere} der axiomatische Standpunkt in HILBERTS "Grundlagen der Geometrie" erhalten hat, besteht

darin, daß man von dem sachlichen Vorstellungsinhalt der Grund-
~~ann~~ebegriffe einer Theorie abstrahiert und an deren Stelle
gewisse schematisch angesetzte Terme und Prädikate treten
läßt, die nur ihrer satzlogischen Rolle nach bestimmt sind.
Auf diese Weise treten an die Stelle von Feststellungen, die
in inhaltlichen Axiomen ausgesprochen sind, Schemata von Grund-
annahmen über jene angesetzten Terme und Prädikate. Die von
solcher Art Axiomen ausgehenden logischen Deduktionen erhalten
somit einen rein hypothetischen Charakter. ^{Und} ~~Auch~~ die Axiome
selbst bilden nun nicht mehr Feststellungen von Sachverhalten;
es kann nicht von ihrem Zutreffen, sondern nur von ihrer
Erfüllbarkeit bzw. ihrer Widerspruchsfreiheit die Rede sein.
Die logische Widerspruchsfreiheit der axiomatischen Annahmen
ist die Mindestforderung, der genügt sein muß, damit das
logische Deduzieren, das von diesen Annahmen ausgeht, von
irgend einem Belang ist. \perp

→ ~~Se~~ knüpft sich an die verschärfte Form der Axiomatik,
wie sie sich durch die Abstraktion vom Sachgehalt einer Theorie
ergibt χ - wir wollen sie hier kurz "formale Axiomatik" nennen -,
das Erfordernis eines Nachweises der Widerspruchsfreiheit für
die Axiome. ^{Für} während die inhaltliche Axiomatik ihre Grundsätze
als evidente *besteht ja ein solches Erfordernis nicht, da sie*

\perp Dass diese ^{Bedingung} ~~Forderung~~ erfüllt wird, ist aber
keineswegs selbstverständlich, und so \rightarrow

Tatsachen hinstellt, die man sich klarmachen kann, oder (sie) als Extrakt von Erfahrungskomplexen formuliert und damit dem Glauben Ausdruck gibt, daß man Gesetzen der Natur auf die Spur gekommen ist, zugleich in der Absicht, diesen Glauben durch den Erfolg der Theorie zu stützen.

Auch die formale Axiomatik bedarf sowohl zur Verfolgung der Deduktionen wie für den Nachweis der Widerspruchsfreiheit jedenfalls gewisser Evidenzen, aber mit dem wesentlichen Unterschied, daß diese Art von Evidenz nicht auf einer besonderen Erkenntnisbeziehung zu dem jeweiligen Sachgebiet beruht, sondern eine rein mathematische ^{- logische} ist.

Für die richtige Würdigung des Verhältnisses von inhaltlicher und formaler Axiomatik in ihrer Bedeutung für die Erkenntnis sind vor allem folgende Gesichtspunkte zu beachten:

Die formale Axiomatik bedarf der inhaltlichen notwendig als ihrer Ergänzung, weil durch diese überhaupt erst die Anleitung zur Auswahl der formalen ^{Ausätze} Systeme und ferner für eine vorhandene formale Theorie auch erst die Anweisung zu ihrer Anwendung auf ein Gebiet der Tatsächlichkeit gegeben wird.

Andrerseits können wir bei der inhaltlichen Axiomatik deshalb nicht stehenbleiben, weil wir es in der Wissenschaft, wenn nicht durchweg, so doch vorwiegend mit solchen Theorien zu tun haben, die gar nicht vollkommen den wirklichen Sachverhalt wiedergeben, sondern eine vereinfachende Idealisierung des Sachverhalts darstellen und darin ihre Bedeutung haben. Eine derartige Theorie kann gar nicht durch Berufung auf die evidente Wahrheit ihrer Axiome oder auf Erfahrung ihre Begrün-

dung erhalten, vielmehr kann diese Begründung nur in dem Sinne geschehen, daß die in der Theorie vollzogene Idealisierung, d. h. die Extrapolation, durch welche die Begriffsbildungen und Grundsätze der Theorie die Reichweite entweder der anschaulichen Evidenz oder der Erfahrungsdaten überschreiten, als eine widerspruchsfreie eingesehen wird. Für diese Erkenntnis der Widerspruchsfreiheit nützt uns auch die Berufung auf die ~~approximative~~ Gültigkeit der Grundsätze nichts, denn ein Widerspruch kann ja gerade dadurch zustande kommen, daß eine Beziehung als strikte gültig angenommen wird, die nur in eingeschränktem Sinne besteht.

Wir sind also genötigt, die Widerspruchsfreiheit von theoretischen Systemen losgelöst von der Betrachtung der Tatsächlichkeiten zu untersuchen, und damit befinden wir uns bereits auf dem Standpunkt der formalen Axiomatik.

Was nun die bisherige Behandlung dieses Problems betrifft, so geschieht diese sowohl bei der Geometrie wie bei den physikalischen Disziplinen durch die Methode der Arithmetisierung: Man repräsentiert die Gegenstände der Theorie durch Zahlen oder Zahlensysteme und die Grundbeziehungen durch Gleichungen ^(oder andere arithmetische Beziehungen) ~~und~~ Ungleichungen ^{oder} derart, daß auf Grund dieser Übersetzung die Axiome der Theorie entweder in arithmetische Identitäten bzw. beweisbare Sätze übergehen, wie es bei der Geometrie der Fall ist, oder aber, wie bei der Physik, in ein System von Bedingungen für arithmetische Gebilde, deren gemeinsame Erfüllbarkeit sich auf Grund arithmetischer Existenzsätze erweisen läßt. Bei diesem Verfahren wird die Arithmetik, d. h. die Theorie der reellen Zahlen (die Analysis) zugrundegelegt.

Wir kommen somit zu dem zweiten der anfangs genannten Themata der Grundlagenuntersuchungen. In der Begründung der Analysis ist es ja im neunzehnten Jahrhundert zuerst durch die Untersuchungen von BOLZANO und CAUCHY und hernach deren Weiterführung und Vollendung durch DEDEKIND, CANTOR und WEIERSTRASZ gelungen, die Methoden der Infinitesimalrechnung, die ja in ihren Anfängen einer vollen Deutlichkeit entbehrten und mehr nur instinktiv gehandhabt wurden, ^{im Sinne eines} ~~durch eine~~ stärkere Anknüpfung an die klassischen Methoden der griechischen Mathematiker EUDOXOS und ARCHIMEDES zu einer präzise mitteilbaren und lehrbaren zu gestalten.

Indem diese Deutlichkeit erreicht wurde, traten zugleich die zugrundeliegenden methodischen Voraussetzungen mehr hervor, und man ging auch dazu über, diese Voraussetzungen über die Zielsetzung der Infinitesimalrechnung hinaus systematisch zu verwerten, wie es ^{ja} vor allem in der Cantor'schen Mengenlehre geschah. Die hier ^{stattfindende} ~~hervortretende~~ starke Überschreitung des mathematisch Gewohnten weckte vielerseits Kritik, die dann noch durch die Entdeckung der mengentheoretischen Paradoxien bestärkt wurde.

Wenngleich es sich ^{nun} auch bei näherem Zusehen erwies, daß es zur Verhütung der Paradoxien genügte, gewisse extreme Begriffsbildungen zu vermeiden, die tatsächlich für den Aufbau der Mengenlehre und erst recht für die Methoden der Analysis garnicht erforderlich sind, so ist doch seitdem die Diskussion über die Grundlagen der Mathematik nicht zur Ruhe gekommen, und man hat sich auch jener Paradoxien als Argument bedient, um viel weiter gehende Einschränkungen des mathematischen Verfahrens zu motivieren, als sie zur Behebung der Widersprüche

direkt erfordert werden.

Für eine gründliche Stellungnahme zu dieser Grundlagen-
diskussion erscheint eine eingehendere Betrachtung der logischen
Struktur der mathematischen Theorien als geboten, ~~zumal/da es~~
~~sich zeigt, daß in den Grundlagen der Arithmetik und Mengen-~~
~~lehre das Logische mit dem Mathematischen aufs engste verfloch-~~
~~ten ist.~~ †

In der Tat bemerkt man, daß es sich bei den zur Diskussion
stehenden Verfahren der Mathematik um Methoden des Folgerns
und der Begriffsbildung handelt, daß also hier eine Art der
Erweiterung der gewöhnlichen Logik zur Geltung kommt. Zugleich
zeigt sich eine enge Verflochtung^{enheit} des Mathematischen mit dem
Logischen: einerseits tritt die Mengenlehre ihrem Gegenstand
nach, durch die Beziehung von Mengen und Prädikaten (d. h.
durch das Verhältnis von Umfang und Inhalt ^{der} ~~von~~ Begriffen) in
engste ^{er}Brührung mit der Logik; andererseits wird man in der
systematischen Untersuchung der logischen Bildungsformen und
Schlußweisen mit Notwendigkeit auf mathematische Betrachtungen
geführt. So ist ja bereits die traditionelle Lehre von den
kategorischen Schlüssen eine typisch mathematische Unter-
suchung, was nur durch ihre historische Einordnung in die
Philosophie ^{leicht} ~~leicht~~ verdeckt wird. Mit dieser mathematischen
Seite des Logischen hängt es auch zusammen, daß die logischen
Schlüsse - wie sie insbesondere bei der reichhaltigeren Anwen-
dung der Logik in den mathematischen Theorien zur Verwendung
kommen -, in einer mathematischen Weise fixierbar und aus einer
Reihe von wenigen Elementerprozessen zusammensetzbar sind.

Dieser Sachverhalt wurde zur vollen Deutlichkeit gebracht

durch die Entwicklung der Systeme der symbolischen Logik, wie sie, vorbereitet durch den BOOLE'schen Logikkalkül, um die Jahrhundertwende insbesondere von PEIRCE, FREGE, SCHRÖDER, PEANO, WHITEHEAD u. RUSSELL geschaffen wurden. Bei der Konstruktion dieser Systeme ging man teils darauf aus, eine handliche Symbolik zu gewinnen, die zugleich eine genauere Kontrolle der Schlußfolgerungen ermöglichte, teils bezweckte man eine Einordnung der Mathematik in die Logik.

Es war der Gedanke HILBERTs, die logische Symbolik dazu zu verwenden, die mathematischen Beweismethoden zum Gegenstand einer mathematischen Untersuchung, ~~zu machen~~, einer "Beweistheorie" zu machen.) Der wesentliche Gesichtspunkt dabei ^{ist} ~~war~~, die Methode der formalen Axiomatik auch auf das logische Schließen selbst, wie es in den Theorien der Arithmetik und Mengenlehre ausgeübt wird, anzuwenden und somit an die Stelle der Prozesse der logische Begriffsbildung und Folgerung formal angesetzte Operationen ^e treten zu lassen. Hierdurch gewinnen wir den Vorteil, daß wir bei ~~den~~ strittigen Begriffen und Schlußweisen nicht die inhaltliche Bedeutung, in Betracht zu ziehen brauchen, sondern nur den formalen Effekt, der durch ihre Anwendung in den deduktiven Prozessen bewirkt wird. Dieser Effekt läßt sich vom Standpunkt einer ganz elementaren Betrachtung verfolgen. Wir haben so die Möglichkeit, ^{Methoden,} die vom inhaltlichen Standpunkt problematisch erscheinen, als beweistechnische Verfahren ^{zu akzeptieren und} zu rechtfertigen, ~~in analoger Weise, wie wir in der Mathematik~~

In diesem Sinne hat Hilbert die Aufgabe gestellt und in Angriff genommen, das System der Analysis und Mengenlehre als

ein widerspruchsfreies Gedankengebäude zu erweisen. Diese Aufgabe gliedert sich in zwei Teile.

Es handelt sich zunächst darum, die Beweismethoden der Analysis und Mengenlehre einer formalen Axiomatik zu unterwerfen oder, wie wir es kurz nennen wollen, zu formalisieren. Hierfür konnte sich Hilbert auf die bereits ausgebildeten zuvor genannten Systeme der Logistik stützen, in denen eine solche Formalisierung bereits geleistet worden war. Der Gesichtspunkt der streng formalen Deduktion wurde zuerst bei Frege scharf herausgestellt und für Teile der Mathematik zur Durchführung gebracht. Die Methoden zur handlichen Ausgestaltung einer Formalisierung wurden von Peano entwickelt. Eine Verbindung von beidem fand in den PRINCIPIA MATHEMATICA durch Whitehead und Russell statt.

Die hier vorliegende Formalisierung ist freilich für die Zwecke der Beweistheorie insofern nicht vorteilhaft, als sie keine Gliederung in elementarere und höhere Bereiche der Begriffsbildung und des Schließens ermöglicht. Das rührt davon her, daß in den Principia Mathematica sowie bei Frege die Gewinnung der Zahlentheorie aus der allgemeinen Mengenlehre als eines der Hauptziele genommen ist. So können hier die Methoden einer elementareren Behandlung der Zahlentheorie nicht in Erscheinung treten.

Von einer Formalisierung für die Zwecke der Beweistheorie ist zu wünschen, daß sie eine analoge axiomatische Gliederung der logisch-mathematischen Bildungen und Prozesse liefert, ~~nicht~~ ~~treten läßt~~, wie sie in der üblichen Axiomatik durch die Sonderung der Axiomgruppen bewirkt wird. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint ein schichtweiser Aufbau des deduktiven Formalismus als angemessen.

So wurde man veranlaßt, von neuem die Formalisierung der mathematischen Disziplinen vorzunehmen, und man ist dabei zur präzisen Beschreibung von naturgemäß abgegrenzten Teilbereichen der logisch-mathematischen Deduktion gelangt, welche sich als solche zum ersten Mal an Hand des Formalisierungsprozesses darstellten.

Auf Grund der vollzogenen Formalisierung gewinnt nun die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit für die arithmetischen Disziplinen eine bestimmtere mathematische Form. Es handelt sich jetzt darum, zu erkennen, daß die festgelegten Prozesse der Aussagenbildung und der Schlußfolgerung nicht zur Herleitung solcher Sätze führen können, die einander im Sinne der gewöhnlichen inhaltlichen Interpretation widersprechen. Das Widersprechen von Sätzen stellt sich mittels der Formalisierung der Negation durch eine einfache Beziehung der entsprechenden Satzformeln dar.

Überdies ergibt sich bei einer zweckmäßigen Formalisierung der Aussagenlogik noch eine Vereinfachung in der Weise, daß ausgehend von irgend einem Widerspruch jede beliebige Aussage des formalisierten Bereiches herleitbar wird. Auf Grund davon genügt es, um die Unmöglichkeit eines Widerspruchs in dem genannten Sinne erkennen zu lassen, daß man das Gegenteil eines bestimmten einzelnen elementar gültigen Satzes als nicht herleitbar erweist. Die Ausführung eines solchen Nachweises - anschließend an den schrittweisen Aufstieg der Teilbereiche - bildet den zweiten Teil des Hilbert'schen Programms. Die Durchführung ist freilich Hilbert nicht gelungen, und es ist auch heute noch nicht abzusehen, ob - oder vielmehr in welchem Sinne - sie gelingen kann.

Es bestehen nämlich hier nicht nur große technische, sondern auch grundsätzliche Schwierigkeiten. Diese erheben sich vor allem mit Bezug auf die Frage, welche Mittel für den gewünschten Nachweis zugelassen werden sollen. In der Tat ging ja das Bedürfnis für einen solchen Nachweis von einer Kritik der üblichen Beweismethoden aus.* Soll dieser Kritik Rechnung getragen werden, so darf der Nachweis der Widerspruchsfreiheit nicht seinerseits auf einer Verwendung der kritisierten Methoden beruhen.

Durch diese Erwägung erhalten wir aber zunächst nur eine Abgrenzung im negativen Sinne, und es bleibt noch die Aufgabe, genauer zu bestimmen, auf welche Arten der Überlegung die Beweistheorie sich stützen soll. Für die Wahl dieses Standpunkts wird uns ein Anhalt durch das Erfordernis gegeben, daß zumindest ja die Behauptung der Widerspruchsfreiheit für die formalisierten Theorien sich präzise fassen lassen muß.

Diesem Erfordernis wird bereits genügt durch eine Art der elementaren mathematischen Betrachtungsweise, welche Hilbert als den finiten Standpunkt bezeichnet hat. Es ist diejenige Art anschaulicher mathematischer Überlegung, wie sie in der elementaren Kombinatorik angewandt wird. Auch die elementare Zahlentheorie und Buchstaben-Algebra läßt sich auf diese Art behandeln. Das Kennzeichnende für die finite Betrachtung besteht in folgenden Momenten:

1. Als Gegenstände werden nur endliche Gebilde genommen, an denen auch nur diskrete Gestaltsmerkmale unterschieden werden.

2. Die Formen des allgemeinen und des existentialen Urteils kommen nur auf eine eingeschränkte Art zur Anwendung, im Sinne

der Vermeidung der Vorstellung von unendlichen Gesamtheiten; nämlich das allgemeine Urteil wird nur in hypothetischem Sinne gebraucht, als eine Aussage über jedweden vorliegenden Einzelfall, und das existentielle Urteil als ein (zweckmäßig zu vermerkender) Teil einer näher bestimmten Feststellung, in der entweder ein bestimmt strukturiertes Gebilde vorgewiesen oder ein allgemeines Verfahren aufgezeigt wird, nach dem man zu einem (gewisse Bedingungen erfüllenden) Gegenstand einen anderen Gegenstand mit verlangten Eigenschaften gewinnen kann.

3. Alle Annahmen, die man einführt, beziehen sich auf endliche Konfigurationen.

Mit der genaueren Beschreibung und Erörterung der finiten Betrachtungsweise werden wir uns noch des Näheren zu befassen haben.

Es wäre zweifellos sehr befriedigend, wenn wir uns in der beweistheoretischen Untersuchung völlig an diesen Rahmen elementarer Betrachtung halten könnten. Die Möglichkeit hierfür scheint zunächst insofern gegeben zu sein, als ja mit Bezug auf eine formalisierte Theorie die Behauptung ihrer Widerspruchsfreiheit sich nach dem vorhin Bemerkten in finiter Form dahin aussprechen läßt, daß ein jeder formalisierte Beweis eine Endformel hat, die verschieden ist von der Negation einer bestimmten geeignet gewählten Satzformel.

Die Formulierbarkeit eines Problems im Rahmen gewisser Ausdrucksmittel bietet aber noch keine Gewähr dafür, daß seine Lösung sich mit diesen Mitteln bewerkstelligen läßt. Tatsächlich hat es sich im Fall der Beweistheorie herausgestellt, daß für die gewünschten Nachweise der Widerspruchsfreiheit formalisierter Theorien die finiten Methoden nicht zulänglich sind.

Man hat sich so genötigt gesehen, für die Beweistheorie den ursprünglichen finiten Standpunkt zu einem "konstruktiven" Standpunkt zu erweitern, der sich etwa so kennzeichnen läßt, daß von den drei soeben genannten Forderungen nur die ersten beiden aufrecht erhalten werden, die dritte aber fallen gelassen wird. So kommt man dazu, für die Beweistheorie ungefähr eine solche methodische Haltung einzunehmen, wie sie der BROUWER'sche Intuitionismus für die Mathematik überhaupt als einzig zulässig ansieht:)

Doch selbst bei dieser Erweiterung des finiten Standpunkts hat es nicht allenthalben sein Bewenden. Man sieht sich vielmehr bei der Behandlung gewisser Fragen dazu gedrängt, auch die zweite der obigen Forderungen fallen zu lassen. Dies ist zum Beispiel bei der Behandlung der Frage der Vollständigkeit des Systems der Regeln für die gewöhnliche Prädikatenlogik der Fall, die zuerst von Kurt GÖDEL im positiven Sinne gelöst worden ist. Hier erfordert bereits die Formulierung des Ergebnisses, wenigstens wenn man sie in prägnanter und einfacher Form haben will, die Einführung einer nichtkonstruktiven Begriffsbildung. Eine finite Fassung des Ergebnisses und auch ein Beweis im finiten Rahmen läßt sich erzwingen, ist aber mit technischen Komplikationen belastet.

Dieses Beispiel des Gödel'schen Vollständigkeitssatzes ist zugleich dafür charakteristisch, daß die beweistheoretische Fragestellung in ihrer unnatürlichen Ausgestaltung nicht bei dem Problem verbleibt, welches aus der Kritik der üblichen Verfahren der klassischen Mathematik erwachsen ist. Auch HILBERT hat ja von vorn^h herein die Aufgabe der Beweistheorie sehr weit gefaßt.)

Unter den weitergehenden Fragestellungen sind nun auch etliche solche, bei denen die Verbindlichkeit der Anforderung einer methodischen Beschränkung als fraglich erscheint. So sind in neuerer Zeit verschiedenen erfolgreiche Untersuchungen, die in weiterem Sinne zum Felde der Beweistheorie gehören, im Rahmen der üblichen mathematischen Methodik, also ohne Beschränkung der Begriffsbildungen und Beweismethoden, durchgeführt worden. Andererseits haben verschiedene Autoren für jene speziellen beweistheoretischen Untersuchungen, die es mit den Fragen der Widerspruchsfreiheit zu tun haben, einen solchen Standpunkt gewählt, bei welchem von den drei vorhin formulierten Forderungen nur die erste zugrunde gelegt wird.

Eine endgültige Entscheidung der Methodenfrage kann dieser Sachlage gegenüber jedenfalls nur erwartet werden, wenn man einen Überblick darüber hat, was die verschiedenen Methoden zu leisten vermögen. Es kann schwerlich behauptet werden, daß gegenwärtig eine Entscheidung jener Frage vorliegt, die nicht bloß durch eine vorgefaßte philosophische Ansicht bestimmt ist. Und bezüglich der verschiedenen sich bekämpfenden und heute üblicherweise gegenübergestellten philosophischen Lehrmeinungen besteht der Verdacht, daß sie ungeklärte Voraussetzungen in sich schließen, die ihrerseits ^evielleicht eher fragwürdig sind als die angefochtenen mathematischen Theorien.

Angesichts dieser Sachlage erscheint es als das angemessene Verfahren, daß wir einerseits die methodische Richtlinie, die durch den Gesichtspunkt der finiten Betrachtung gegeben wird, im Auge behalten, andererseits uns nicht in der Methode festlegen. *Dabei ist insbesondere der Umstand mitbestimmend,* ~~Das Letztere erscheint insbesondere noch im Hinblick~~ *mitbestimmend* ~~auf den Umstand geboten,~~ daß neuerdings die beweistheoretischen Untersuchungen in einen engeren Kontakt getreten sind mit den allgemeinen Theorien der abstrakten Algebra ⁿund Topologie/

sodaß die Aussicht sich eröffnet, daß die beweistheoretischen Methoden zu einem wirkungsvollen Hilfsmittel in diesen Gebieten sich entwickeln. Bei solchen Anwendungen fungiert die Beweistheorie nicht in der Rolle der Beweiskritik, sondern im Rahmen der üblichen Methoden des mathematischen Schließens, und es würde darum hier die Forderung der finiten Betrachtungsweise gar nicht am Platze sein.

Zur Vorbereitung unserer beweistheoretischen Betrachtungen ist es nun auf jeden Fall wünschenswert, daß die spezifische Art der finiten Überlegung deutlich gemacht werde. Zur Illustrierung eignet sich besonders das Gebiet der elementaren Zahlentheorie, in welcher der Standpunkt der direkten inhaltlichen, ohne axiomatische Annahmen sich vollziehenden Überlegungen am reinsten ausgebildet ist.

(§ 2. Die elementare Zahlentheorie)

Das Kennzeichnende für diesen methodischen Standpunkt

Die ~~finite~~ Betrachtungsweise ist ^{zunächst,} ~~dadurch~~ gekennzeichnet, daß die Überlegungen in Form von Gedankenexperimenten ~~xxxxxxxx~~ ~~xxxxxx~~ an Gegenständen angestellt werden, an denen nur diskrete Merkmale von Belang sind. Auf diesem Umstande beruht es, daß wir Figuren in einem strikteren Sinne als üblicherweise in der elementaren Geometrie zur Darstellung der Gegenstände benutzen können.

Die Betrachtungen sollen sich ferner an das konkrete Vorstellen anlehnen. Dabei gehen wir freilich in einer idealisierenden Weise über das eigentlich Konkrete hinaus, indem wir die unbeschränkte Wiederholbarkeit des Aneinanderfügens von Figuren voraussetzen. Diese Art der Idealisierung ist von derjenigen, welche die Kritik an den üblichen Verfahren der Mathematik hervorgerufen hat, grundsätzlich dadurch unterschieden, daß die auftretenden Objekte stets endlich sind. Wo hier Unendlichkeit auftritt, ist es stets nur die Unendlichkeit eines offenen Bereiches, auf den nicht als auf einen fertig bestehenden [[]Bezug genommen wird.

[Gegenstand

Als Prototyp eines solchen offenen Bereiches dient uns die Zahlenreihe, wie wir sie vom konstruktiven Standpunkt zu betrachten haben. Wir haben hier ein Ausgangsobjekt und einen Prozeß des Fortschreitens. Beides müssen wir in bestimmter Weise ~~xxxxxxxx~~ anschaulich festlegen. Die besondere Art der Festlegung ist dabei unwesentlich, nur muß die einmal getroffene Wahl für die jeweilige Betrachtung beibehalten werden. Wir wählen als Ausgangsding das Zeichen 1 und als ^{die Ziffer}

Prozeß des Fortschreitens das Anfügen von 1.

Die Dinge, die wir auf diese Weise erhalten, wie z.B.

1, 11, 1111

sind Figuren von folgender Art: sie beginnen mit 1, sie enden mit 1; auf jede 1, die nicht schon das Ende der Figur bildet, folgt eine angefügte 1. ^{2/} Sie werden durch einen zum Abschluß kommenden Aufbau erhalten, der sich daher auch durch einen schrittweisen Abbau rückgängig machen läßt. [Wir wollen diese Figuren, mit einer leichten Abweichung vom gewohnten Sprachgebrauch, (~~in Ermangelung eines besseren kurzen Ausdrucks~~) als "Ziffern" bezeichnen.])

Die Bezeichnung ist so gemeint, daß die Ziffern nicht als Symbole für etwas anderes, sondern selbst als Objekte betrachtet werden sollen; in diesem Sinne legen wir ihnen nicht eine Bedeutung bei. In einem andern Sinne aber sind die Ziffern nicht bedeutungslos, nämlich insofern ihre Struktur, wie sie sich aus der Art ihrer Gewinnung ergibt, dasjenige ist, was an ihnen betrachtet wird. In dieser Hinsicht sind die Gegenstände der Zahlentheorie, wie wir sie hier betreiben, analog den ^σ geometrischen Figuren, nur mit den folgenden Unterschieden: 1. Bei den geometrischen Figuren gehören zu den wesentlichen Eigenschaften auch solche, deren Vorliegen an der Figur nicht unmittelbar mit Schärfe beurteilt werden kann (wie z.B. genaue Geradheit oder genaue Längengleichheit); bei den Ziffern sind dagegen, wie schon bemerkt, nur diskrete Merkmale wesentlich. 2. Bei den geometrischen Sätzen haben wir es ausschließlich mit allgemeinen Behauptungen zu tun, sodaß hier jede Figur zur Repräsentation einer Gattung von

Fällen dient; in der Zahlentheorie bilden die Ziffern jede für sich ein individuelles Objekt. Zu beachten ist übrigens, daß wir die Ziffern nicht nur als Figuren schlechthin, sondern gegebenenfalls auch als Exemplare zu betrachten haben.

Durch die Analogie zur Geometrie ist zugleich der Hinweis darauf gegeben, daß wir bei den Ziffern - auf Grund einer zu vereinbarenden Einstellung - von geringfügigen ("unwesentlichen") Unterschieden der Ausführung zu abstrahieren haben.

Zur Angabe bestimmter Ziffern bedienen wir uns im allgemeinen eines Exemplars. Im übrigen benutzen wir in üblicher Weise "Zeichen zur Mitteilung", wie wir es z.B. in der Geometrie tun, wenn wir sagen: "Der Punkt P liegt auf der Geraden g". So verwenden wir insbesondere:

1. ~~kleine~~ deutsche Buchstaben zur Bezeichnung für unbestimmt gelassene Ziffern;
2. ~~etwelle~~^{ie} des üblichen Nummern als Bezeichnungen für bestimmte Ziffern, z.B. "2" für 11, "3" für 111;
3. Zeichen für gewisse operativ eingeführte Funktionen, deren Argumente bestimmte oder auch unbestimmt gelassene Ziffern sind, z.B. "a + 11";
4. Zeichen für gewisse anschaulich erklärte Beziehungen zwischen bestimmten oder auch unbestimmt gelassenen Ziffern, z.B. "a < b";
5. Klammern zur Verdeutlichung der Aufeinanderfolge von Prozessen, wo diese nicht ohne weiteres ersichtlich ist.

Wir wollen nun die Zahlentheorie in der intendierten anschaulichen Art ihrer Behandlung ein Stück weit entwickeln.

Das erste, was wir zu betrachten haben, sind die Rechenoperationen, welche Methoden der Gewinnung von Ziffern aus

gegebenen Ziffern bilden. Wir beginnen mit der Addition. Aus der Erzeugungsweise der Ziffern ist ersichtlich, daß wir auch ausgehend von irgendeiner Ziffer a durch sukzessives Anfügen von 1 wieder zu einer Ziffer gelangen. Aus einer Ziffer a und einer Ziffer b gewinnen wir daher wiederum eine Ziffer, indem wir zunächst das Ausgangselement von b an a anfügen und dann (sofern b nicht selbst 1 ist) die weiteren Schritte des Anfügens von 1 wie bei der Bildung von b vornehmen. Wir können in diesem Sinne kurz vom "Anfügen der Ziffer b an die Ziffer a" sprechen. Die so entstehende Ziffer geben wir, mit Bezug auf die beschriebene Art ihrer Gewinnung aus den Ziffern a und b, durch den Funktionsausdruck "a + b" (in Worten: "die Summe von a und b") an. Das Funktionszeichen dient also hier zur kurzen Angabe eines Prozesses, und der Ausdruck "a + b" ist eine Kennzeichnung einer Ziffer vermittelt eines sie erzeugenden Prozesses.

Die Multiplikation kann nun folgendermaßen definiert werden: a · b [ist die Ziffer, die man aus der Ziffer a erhält, indem man beim Aufbau jeweils 1 durch die Ziffer b ersetzt, sodaß man also zunächst b bildet und anstatt jedes in der Bildung von a vorkommenden Anfügens von 1 das Anfügen von b ausführt.]

Die Ergebnisse der Ausführung von Rechenoperationen stellen wir üblicherweise durch Gleichungen dar. Allgemein verwenden wir hier Gleichungen zu Feststellungen des Inhalts, daß eine durch eine gewisse Kennzeichnung, insbesondere durch einen Funktionsausdruck, gegebene Ziffer dieselbe ist wie

(das "Produkt" von a und b)

eine direkt durch ein Exemplar oder auch durch eine andere Kennzeichnung gegebene Ziffer. So wird z.B. durch die Gleichung

$$11 + 111 = 11111$$

der elementare Sachverhalt ausgedrückt, daß wir durch Anfügen der Ziffer 111 an die Ziffer 11 die Ziffer 11111 gewinnen. In der Angabe von Gleichheitsbeziehungen durch Gleichungen können auch unbestimmt gelassene Bestandteile auftreten, die wir durch Mitteilungsbuchstaben angeben, wie z.B. wenn wir die Behauptung formulieren, daß für beliebige Ziffern a, b

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a} .$$

Unmittelbar an die Bildungsweise der Ziffern knüpft sich die Größenvergleichung. Nämlich aus dieser Bildungsweise geht hervor, daß die Verschiedenheit einer Ziffer von einer andern nur darin bestehen kann, daß der Prozeß der Bildung der einen von ihnen über den für die andere hinausführt. Es ist demnach die eine Ziffer, etwa a, eine Teilfigur der anderen, b, die aus jener durch weitere Anfügungen von 1, oder auch - was auf das gleiche hinauskommt - durch Anfügung einer Ziffer erhalten wird. Wir sagen in diesem Falle, daß a kleiner ist als b, oder auch, daß b größer ist als a, und wenden dafür die Bezeichnung

$$\underline{a} < \underline{b}, \quad \underline{b} > \underline{a}$$

an. Aus unserer Überlegung geht hervor, daß für eine Ziffer a und eine Ziffer b stets eine der Beziehungen

$$\underline{a} = \underline{b}, \quad \underline{a} < \underline{b}, \quad \underline{b} < \underline{a}$$

stattfinden muß, und andererseits ist aus der anschaulichen Bedeutung ersichtlich, daß diese Beziehungen einander ausschließen. Desgleichen ergibt sich unmittelbar, daß, falls a < b und b < c, auch stets a < c ist.

Man beachte, daß bei dieser Einführung der Größenbeziehung der Größenbegriff auf den Begriff des Bestandteils zurückgeführt wird. Generell sei darauf hingewiesen, daß in unserer heutigen Mathematik (nirgends der Größenbegriff) als eigentlicher (irreduzibler) Grundbegriff verwendet wird.

Aus unserer Überlegung betreffend die Vergleichung verschiedener Ziffern entnehmen wir noch, daß eine Ziffer a, die größer ist als eine Ziffer b, sich in der Form b + c darstellen läßt. Andererseits besteht für beliebige Ziffern b, c die Beziehung

$$\underline{b} < \underline{b} + \underline{c} .$$

Wir gehen nunmehr daran, für die Addition und Multiplikation die Rechengesetze festzustellen.

Aus der Vergegenwärtigung des Prozesses der Addition entnimmt man das assoziative Gesetz, wonach, wenn a, b, c irgendwelche Ziffern sind, stets

$$\underline{a} + (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} .$$

Nicht so direkt ergibt sich das kommutative Gesetz, welches besagt, daß stets

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$$

ist. Wir gebrauchen hier die Beweismethode der vollständigen Induktion. Machen wir uns zunächst klar, wie diese Schlußweise von unserem elementaren Standpunkt aufzufassen ist: Es werde irgendeine Aussage betrachtet, die sich auf eine Ziffer Bezieht und die einen elementar anschaulichen Inhalt besitzt. Die Aussage treffe für 1 zu, und man wisse auch, daß die Aussage, falls sie für eine Ziffer n zutrifft, dann auch jedenfalls für die Ziffer n + 1 zutrifft. Hieraus folgert man, daß die Aussage für jede vorgelegte Ziffer a zutrifft.

In der Tat ist ja die Ziffer a aufgebaut, indem man, von 1 beginnend, den Prozeß des Anfügens von 1 anwendet. Konstatiert man nun zunächst, das Zutreffen der betrachteten Aussage für 1, und bei jedem Anfügen einer 1, auf Grund der gemachten Voraussetzung, das Zutreffen der Aussage für die neu erhaltene Ziffer, so gelangt man beim fertigen Aufbau von a zu der Feststellung, daß die Aussage für a zutrifft.

Wir haben es also hier nicht mit einem selbständigen Prinzip zu tun, sondern mit einer Folgerung, die wir aus dem konkreten Aufbau der Ziffern entnehmen.

Mit Hilfe dieser Schlußweise können wir nun nach der üblichen Art zunächst zeigen, daß für jede Ziffer a

(3)

$$\underline{a} + 1 = 1 + \underline{a};$$

generell

um daher mittels der Vollständigen Induktion die Gleichheit von a + b und b + a zu erkennen, genügt es, wenn wir für ein beliebiges Ziffern paar a, b unter der Voraussetzung, daß für dieses

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a},$$

auch die Beziehung

$$\underline{a} + (\underline{b} + 1) = (\underline{b} + 1) + \underline{a}$$

feststellen. Dies geschieht, indem wir nacheinander die folgenden Ausdrücke als Kennzeichnungen derselben Ziffer erweisen:

$$\underline{a} + (\underline{b} + 1)$$

$$(\underline{a} + \underline{b}) + 1 \quad \text{auf Grund von (1),}$$

$$(\underline{b} + \underline{a}) + 1 \quad \text{auf Grund unserer Induktionsvoraussetzung,}$$

$$\underline{b} + (\underline{a} + 1) \quad \text{auf Grund von (1),}$$

$$\underline{b} + (1 + \underline{a}) \quad \text{auf Grund von (3),}$$

$$(\underline{b} + 1) + \underline{a} \quad \text{auf Grund von (1).}$$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Aus der Definition der Multiplikation entnimmt man unmittelbar, daß

$$(4) \quad 1 \cdot \underline{a} = \underline{a}, \quad \underline{a} \cdot 1 = \underline{a}.$$

Durch direkte Überlegung ergibt sich ferner das assoziative Gesetz

$$(5) \quad \underline{a} \cdot (\underline{b} \cdot \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{b}) \cdot \underline{c},$$

sowie das distributive Gesetz

$$(6) \quad (\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} = (\underline{a} \cdot \underline{c}) + (\underline{b} \cdot \underline{c}).$$

Das andere distributive Gesetz, wonach stets

$$(7) \quad \underline{a} \cdot (\underline{b} + \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{b}) + (\underline{a} \cdot \underline{c}),$$

wird auf Grund der Gesetze der Addition und von (4), (6) durch vollständige Induktion eingesehen. Das kommutative Gesetz (über a, bei Festhalten der Ziffern b, c)

$$(8) \quad \underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$$

ergibt sich wiederum durch vollständige Induktion unter Benutzung von (4), (6), (7).

Um zum Begriff der Teilbarkeit zu gelangen, betrachten wir die Division mit Rest. Vergegenwärtigen wir uns die Bildung von a · b. Hier entspricht der Folge der Ziffern 1, 11, ..., a, die wir beim Aufbau von a zu bilden haben, die Folge der Ziffern b, b + b, ..., a · b, d. h.:

$$(9) \quad 1 \cdot \underline{b}, 11 \cdot \underline{b}, \dots, \underline{a} \cdot \underline{b}.$$

Jede dieser Ziffern ist größer als die ihr vorangehende. Für b = 1 haben wir a · b = a, andernfalls b = 1 + c, also a · b = (a · 1) + (a · c), somit a · b > a. Sei nun 1 < b, b < a, dann ist in der Folge (9) die erste Ziffer kleiner und die letzte größer als a. Ist ~~q~~ q · b die letzte Ziffer in der Folge (9), die nicht größer als a ist, dann ist jedenfalls (q + 1) · b > a. Jetzt ist entweder

$\underbrace{a = q \cdot b, \text{ oder } a > q \cdot b}_{\text{es ist}}$, also $a = (q \cdot b) + r$ für eine bestimmte Ziffer r ; diese ~~Ziffer~~ ist dann kleiner als b , da ja

$$(q \cdot b) + b = (q + 1) \cdot b, \quad (q + 1) \cdot b > a.$$

Hierbei ist ersichtlich, daß die Darstellung $a = q \cdot b$ stets nur für eine Ziffer q bestehen kann, und ebenso die Darstellung $a = (q \cdot b) + r$ stets nur für je eine Ziffer q und je eine Ziffer r , sofern wir die Bedingung stellen, daß $r < b$ ist.

Wir sagen im ersten Fall, daß a durch b teilbar ist; im andern Fall stellt die Gleichung $a = (q \cdot b) + r$ die Division von a durch b mit dem Rest r dar.

Man beachte, daß nicht nur mit der Feststellung der Teilbarkeit von a durch b eine Darstellung

$$a = q \cdot b$$

gegeben ist, sondern auch aus einer Gleichung

$$a = q \cdot b$$

(und somit auch aus einer Gleichung $a = b \cdot q$) die Teilbarkeit von a durch b folgt, da ja die betreffende Ziffer q der Folge der Ziffern $1, 11, \dots, a$ angehören muß.

Eine Ziffer, die sich nicht als Produkt von zwei kleineren Ziffern darstellen läßt, - (die Gesamtheit solcher Produkte können wir ja durchgehen) -, nennen wir eine Primzahl.

Ist n eine von 1 verschiedene Ziffer, so gibt es in der Folge der Ziffern 1 bis n jedenfalls eine erste, welche die Eigenschaft hat, von 1 verschieden und Teiler von n zu sein. Von diesem "kleinsten von 1 verschiedenen Teiler von n " zeigt man leicht, daß er eine Primzahl ist.

Nun können wir auch nach dem Verfahren von EUKLID den Satz beweisen, daß ~~xx~~ zu jeder Ziffer a eine Primzahl $> a$

bestimmt werden kann: Man multipliziere die Ziffern der Folge von 1 bis a miteinander, addiere 1 und nehme von der so erhaltenen Ziffer den kleinsten von 1 verschiedenen Teiler t. Dieser ist dann eine Primzahl, und man erkennt leicht, daß t nicht in der Folge der Ziffern von 1 bis a vorkommen kann, mithin $> a$ ist.

Für den weiteren Aufbau der elementaren Zahlentheorie bedarf noch das Verfahren der rekursiven Definition einer genaueren Erörterung. Vergegenwärtigen wir uns an einfachen Beispielen, worin dieses Verfahren besteht: Die Funktion n!, deren Wert das Produkt der Ziffern von 1 bis n ist, kann eingeführt werden durch die Gleichungen

$$1! = 1 ,$$

$$(\underline{n} + 1)! = \underline{n}! \cdot (\underline{n} + 1) ,$$

die Potenzfunktion a^b durch die Gleichungen

$$\underline{a}^1 = \underline{a} ,$$

$$\underline{a}^{\underline{n}+1} = \underline{a}^{\underline{n}} \cdot \underline{a} .$$

Wir haben es also zu tun mit Gleichungspaaren vom Typus

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \varphi(1) = \underline{z} , \\ \varphi(\underline{n} + 1) = \psi(\underline{n}, \varphi(\underline{n})) , \end{array} \right.$$

bezw.

$$(11) \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\underline{a}, 1) = \psi(\underline{a}) , \\ \varphi(\underline{a}, \underline{n} + 1) = \chi(\underline{a}, \varphi(\underline{a}, \underline{n})) , \end{array} \right.$$

wobei durch " φ " die zu definierende Funktion bezeichnet wird, z eine feste Ziffer ist, und ψ bzw. ψ und χ bereits bekannte Funktionen sind.

Wie ist eine solche Einführung eines Funktionszeichens vom Standpunkt der anschaulichen Zahlentheorie zu verstehen? Zunächst bedarf es einer Präzisierung des Funktionsbegriffs.

Von einer Funktion sprechen wir hier, wenn eine anschauliche Anweisung gegeben ist, um aus je einer vorgelegten Ziffer, bzw. einem Paar, Tripel ... von Ziffern, wieder eine Ziffer zu gewinnen. Die betrachteten Gleichungspaare lassen sich nun in der Tat als abgekürzte Mitteilungen solcher Anweisungen ansehen.

Machen wir uns dieses an dem Fall des Gleichungspaares (10) klar. Hier handelt es sich darum, für eine gegebene Ziffer m einen Funktionswert $\varphi(\underline{m})$ zu bestimmen. Wenn m = 1 ist, so wird durch die erste Gleichung der Funktionswert z gegeben. Andernfalls hat m die Form a + 1. Man schreibe dann zunächst schematisch auf:

$$\psi(\underline{a}, \varphi(\underline{a})) .$$

Ist a = 1, so ersetze man hierin $\varphi(\underline{a})$ durch z; andernfalls hat a die Form b + 1, und man ersetze dann $\varphi(\underline{a})$ durch

$$\psi(\underline{b}, \varphi(\underline{b})) .$$

Nun ist wieder entweder b = 1 oder b von der Form c + 1. Im ersten Fall ersetze man $\varphi(\underline{b})$ durch z, im zweiten Fall durch

$$\psi(\underline{c}, \varphi(\underline{c})) .$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens führt jedenfalls zu einem Abschluß. Denn die Ziffern

$$\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \dots,$$

welche wir der Reihe nach erhalten, entstehen durch den Abbau der Ziffer m, und dieser muß ebenso wie der Aufbau von m zum Abschluß gelangen. Wenn wir beim Abbau bis zu 1 gekommen sind, dann wird $\varphi(1)$ durch z ersetzt; das Zeichen φ kommt dann in der entstehenden Figur nicht mehr vor, vielmehr treten nur bekannte Funktionen, eventuell in mehrfacher Überlagerung, auf - ψ ist ja aus solchen aufgebaut -, und die innersten Argumente sind Ziffern.

Damit sind wir zu einem berechenbaren Ausdruck gelangt. ~~Die~~
 ~~ψ soll ja eine bereits bekannte Funktion sein.~~ Diese Berech-
nung hat man nun von innen her auszuführen, und die dadurch
gewonnene Ziffer soll der Ziffer m als Funktionswert zuge-
ordnet werden.

Aus dem Inhalt dieser Anweisung ersehen wir zunächst,
daß sie sich in jedem Falle einer vorgelegten Ziffer m
grundsätzlich erfüllen läßt und daß das Ergebnis eindeutig
festgelegt ist. Zugleich ergibt sich auch, daß für jede
gegebene Ziffer n die Gleichung

$$\varphi(\underline{n} + 1) = \psi(\underline{n}, \varphi(\underline{n}))$$

erfüllt wird, wenn wir darin $\varphi(\underline{n})$ und $\varphi(\underline{n} + 1)$ durch die den
Ziffern n und n + 1 gemäß unserer Vorschrift zugeordneten
Ziffern ersetzen und dann für die bekannte Funktion ψ ihre
Definition substituieren.

Ganz entsprechend ist der Fall eines Gleichungspaares
(11) sowie auch der etwas allgemeinere

$$\begin{aligned}\varphi(\underline{a}, 1) &= \psi(\underline{a}), \\ \varphi(\underline{a}, \underline{n} + 1) &= \chi(\underline{a}, \underline{n}, \varphi(\underline{a}, \underline{n}))\end{aligned}$$

zu behandeln.

Auch Gleichungssysteme von noch komplizierterer Struktur
lassen sich nach der geschilderten Methode in Anweisungen für
ein Berechnungsverfahren übersetzen und damit als Verfahren
der Einführung von Funktionen rechtfertigen.

Im ganzen handelt es sich bei den rekursiven Definitionen
nicht um ein selbständiges Definitionsprinzip, sondern die
Einführung von Funktionen durch rekursive Gleichungen hat im
Rahmen der elementaren Zahlentheorie lediglich die Bedeutung
einer abgekürzten Beschreibung gewisser Bildungsprozesse, durch
die man aus einer oder mehreren gegebenen Ziffern wieder
eine Ziffer erhält. -

Als ein Beispiel dafür, daß wir im Rahmen der anschaulichen Zahlentheorie auch Unmöglichkeitbeweise führen können, werde der Satz genommen, welcher die Irrationalität von $\sqrt{2}$ zum Ausdruck bringt: Es kann nicht zwei Ziffern m, n geben, so daß

$$\underline{m} \cdot \underline{m} = 2 \cdot \underline{n} \cdot \underline{n}.$$

Der Beweis wird bekanntermaßen so geführt: Man zeigt zunächst, daß jede Ziffer entweder durch 2 teilbar oder von der Form $(2 \cdot \underline{k}) + 1$ ist und daß daher a · a nur dann durch 2 teilbar sein kann, wenn a durch 2 teilbar ist.

Wäre nun ein Ziffernpaar m, n gegeben, das die obige Gleichung erfüllt, so könnten wir alle Ziffernpaare a, b, wo

a der Folge 1, ..., m,

b der Folge 1, ..., n

angehört, daraufhin ansehen, ob

$$\underline{a} \cdot \underline{a} = 2 \cdot \underline{b} \cdot \underline{b}$$

ist oder nicht. Unter den Wertepaaren, welche der Gleichung genügen, wählen wir ein solches, worin b den kleinstmöglichen Wert hat. Es kann nur ein solches geben; dieses sei m', n'. Aus der Gleichung

$$\underline{m}' \cdot \underline{m}' = 2 \cdot \underline{n}' \cdot \underline{n}'$$

folgt nun nach dem vorher Bemerkten, daß m' durch 2 teilbar ist:

$$\underline{m}' = 2 \cdot \underline{k}' ,$$

also erhalten wir

$$2 \cdot \underline{k}' \cdot 2 \cdot \underline{k}' = 2 \cdot \underline{n}' \cdot \underline{n}' ,$$

und daraus durch einen elementaren indirekten Schluß:

$$2 \cdot \underline{k}' \cdot \underline{k}' = \underline{n}' \cdot \underline{n}' .$$

Hiernach wäre aber n', k' ein Ziffernpaar, das unserer Gleichung genügt, und zugleich wäre k' < n'. Dieses widerspricht aber der Bestimmung von n'.

Der hiermit bewiesene Satz läßt sich übrigens auch positiv aussprechen: Wenn m und n irgend zwei Ziffern sind, so ist m · m von 2 · n · n verschieden.

Soviel mag zur Charakterisierung der elementaren Behandlung der Zahlentheorie genügen. Wir sehen hier, wie die Zahlentheorie sich mittels finiter Betrachtungen entwickeln läßt und daß dabei die üblichen Methoden der Begriffsbildung und Beweisführung - bei geeigneter Interpretation - beibehalten werden können.

Wir wollen uns nun noch Rechenschaft davon geben, daß auch die Anwendung der Zahlentheorie zur Gewinnung der Anzahlenlehre vom finiten Standpunkt keine Schwierigkeiten bietet. Wir bedienen uns dabei einer Überlegung, die von HELMHOLTZ in seinem Aufsatz "Zählen und Messen, ~~(1887)~~ ange- stellt worden ist.) erkenntnistheoretisch betrachtet"

Es sei eine konkrete (also jedenfalls endliche) Gesamtheit von Dingen vorgelegt. Man nehme nacheinander die Dinge der Gesamtheit vor und lege ihnen der Reihe nach die Ziffern 1, 11, 111, ... als Nummern bei. Wenn kein Ding mehr übrig ist, so sind wir zu einer gewissen Ziffer n gelangt. Diese ist damit zunächst als Ordinalzahl für die Gesamtheit der Dinge in der gewählten Reihenfolge bestimmt.

Nun machen wir uns aber leicht klar, daß die resultierende Ziffer n gar nicht von der gewählten Reihenfolge abhängt. Denn seien

$$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$$

die Dinge der Gesamtheit in der gewählten Reihenfolge und

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k$$

die Dinge in einer andern Reihenfolge. Dann können wir von der ersten Numerierung zu der zweiten folgendermaßen durch eine Reihe von Vertauschungen der Nummern übergehen: Falls \underline{a}_1 von \underline{b}_1 verschieden ist, so vertauschen wir zunächst die die Nummer \underline{r} , die das Ding \underline{b}_1 in der ersten Numerierung hat, mit 1, d.h. wir legen dem Ding \underline{a}_r die Nummer 1, dem Ding \underline{a}_1 die Nummer \underline{r} bei. In der hierdurch entstehenden Numerierung hat das Ding \underline{b}_1 die Nummer 1; auf dieses folgt, mit der Nummer 2 versehen, entweder das Ding \underline{b}_2 , oder dieses Ding hat hier eine andere Nummer \underline{s} , die jedenfalls auch von 1 verschieden ist; dann vertauschen wir in der Numerierung diese Nummer \underline{s} mit 2, sodaß nun eine Numerierung entsteht, in der das Ding \underline{b}_1 die Nummer 1, \underline{b}_2 die Nummer 2 hat. \underline{b}_3 hat hier entweder die Nummer 3 oder eine andere, jedenfalls von 1 und 2 verschiedene Nummer \underline{t} ; diese vertauschen wir dann wieder mit 3.

Mit diesem Verfahren müssen wir zu einem Abschluß gelangen; denn durch jede Vertauschung wird die Numerierung der betrachteten Gesamtheit mit der Numerierung

$$\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_k$$

vom Anfang aus um mindestens eine Stelle weiter zur Übereinstimmung gebracht, so daß man schließlich für \underline{b}_1 die Nummer 1, für \underline{b}_2 die Nummer 2, ..., für \underline{b}_k die Nummer \underline{k} bekommt, und dann ist kein weiteres Ding mehr übrig. Andererseits bleibt aber bei jeder der vorgenommenen Vertauschungen der Vorrat der verwendeten Ziffern ganz derselbe; es wird ja nur die Nummer eines Dinges gegen die Nummer eines anderen ausgewechselt. Es geht also die Numerierung jedesmal von 1

bis n, folglich ist auch

$$\underline{k} = \underline{n} .$$

Somit ist die Ziffer n der betrachteten Gesamtheit unabhängig von der Reihenfolge zugeordnet, und wir können sie in diesem Sinne der Gesamtheit als ihre Anzahl beilegen. Wir sagen, die Gesamtheit besteht aus n Dingen.

Hat eine konkrete Gesamtheit mit einer andern die Anzahl gemeinsam, so gewinnen wir, indem wir für jede eine Numerierung vornehmen, eine umkehrbar eindeutige Zuordnung der Dinge der einen Gesamtheit zu denen der anderen. Liegt andererseits eine solche Zuordnung zwischen zwei gegebenen Gesamtheiten von Dingen vor, so haben beide dieselbe Anzahl, wie ja unmittelbar aus unserer Definition der Anzahl folgt.

Von der Definition der Anzahl gelangen wir durch inhaltliche Überlegungen zu den Sätzen der Anzahlenlehre, d.h. der Lehre von den Anzahlen endlicher Gesamtheiten, so insbesondere zu den folgenden Sätzen:

Die Vereinigung zweier Gesamtheiten ohne gemeinsames Element, deren Anzahlen a und b sind, ergibt eine Gesamtheit von a + b Dingen.

Die Anzahl der verschiedenen geordneten Paare $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$, worin a einer Gesamtheit von a Dingen, b einer Gesamtheit von b Dingen angehört, ist a · b.

Die Anzahl der verschiedenen b-stelligen Folgen, deren Glieder einer Gesamtheit von a Dingen entnommen sind, ist a^b.

Daß wir hier diesen Sätze ~~hier~~ erst nach der Aufstellung der Zahlentheorie durch deren Anwendung gewinnen, erscheint nicht als unachgemäß, ~~wenigstens wenn wir die Sätze über Anzahlen nicht im Sinne einer elementaren propädeutischen Disziplin — die natürlich als solche ihre volle Berechtigung~~

nicht als unsachgemäß. Wir müssen freilich die Anzahlenlehre, wie sie hier gemeint ist, unterscheiden von einer solchen im Sinne einer elementaren propädeutischen Disziplin, die als Vorbereitung natürlich ihre volle Berechtigung hat und auch erforderlich ist. Hier handelt es sich um die Anzahlenlehre als eine eigentliche Theorie, welche ihre Sätze in mathematischer Allgemeinheit aufstellt.

Eine methodische Unterscheidung, gewissermaßen in entgegengesetzter Richtung, ist die zwischen unserer und der mengentheoretischen Behandlung der Anzahlenlehre. Was diese letztere betrifft, so beruht sie wesentlich auf jenen Methoden der mathematischen Begriffsbildung, gegen welche sich besonders die Kritik an der Mengenlehre gerichtet hat.

Wir werden auf diesen Sachverhalt im nächsten Paragraphen zu sprechen kommen, in welchem wir uns nunmehr die Überschreitungen der finiten Betrachtungsweise in der üblichen Mathematik vergegenwärtigen wollen.

§3. Überschreitungen des finiten Standpunktes
im mathematischen Schließen.

Unsere ansgeführte Betrachtung der Anfangsgründe der Zahlentheorie diene dazu, uns das direkte inhaltliche, in Gedankenexperimenten an anschaulich vorgestellten Objekten sich vollziehende und von axiomatischen Annahmen freie Schließen in seiner Anwendung und Handhabung vorzuführen. Wir haben uns dabei an die methodische Einstellung gehalten, die wir anfangs nach HILBERT als den finiten Standpunkt^p bezeichnet haben. Wir wollen nun des näheren betrachten, wie man dazu veranlaßt wird, den finiten Standpunkt zu überschreiten. Dabei wollen wir anknüpfen an die früher gegebene Kennzeichnung des finiten Standpunktes, die ja mittels der drei charakteristischen Momente erfolgte: 1. Beschränkung der Gegenstände auf endliche diskrete Gebilde; 2. Beschränkung der Anwendung der logischen Formen des allgemeinen und des existentialen Urteils im Sinne der Vermeidung der Vorstellung von fertigen unendlichen Gesamtheiten; 3. Beschränkung der Annahmen auf solche über endliche Konfigurationen.

Diese Momente sind geordnet im Sinne einer zunehmenden Anforderung. Wir werden ^{nun} ~~daher~~ bei der Betrachtung der Überschreitungen des finiten Standpunktes naturgemäß in entgegengesetzter Reihenfolge, im Sinne einer schrittweisen Abstreifung der Anforderungen, verfahren.

Ein Verstoß gegen die dritte Forderung, wonach alle Annahmen sich auf endliche Konfigurationen beziehen sollen, liegt bereits überall da vor, wo man die Annahme der Gültigkeit eines allgemeinen Satzes über Ziffern einführt.

Eine Veranlassung dazu ^{ist} liegt insbesondere ^{gegeben} vor bei Anwendung der vollständigen Induktion zum Beweise von Sätzen, welche eine Beziehung $A(m, n)$ für beliebige Ziffern m, n behaupten. Soll die Induktion, etwa nach n , im finiten ~~Kern~~ Sinne erfolgen, so muß bei dem Schluß von $A(m, n)$ auf $A(m, n + 1)$ die Ziffer m festgehalten werden. ^{In dieser Weise} ~~So~~ sind wir auch im vorigen Paragraphen bei den Beweisen der Rechengesetze für Summe und Produkt verfahren.

Häufig wird aber die vollständige Induktion so angewandt, daß man zunächst zeigt, daß für jede Ziffer m die Beziehung $A(m, 1)$ besteht, und sodann beweist, daß, falls für die Ziffer n bei jeder beliebigen Ziffer m $A(m, n)$ besteht, dann auch bei jeder Ziffer m $A(m, n + 1)$ besteht. Man schließt daraus nach der vollständigen Induktion, daß für jede Ziffer n gilt, daß für jede Ziffer m $A(m, n + 1)$ besteht.

Hier hat man in der zweiten zu beweisenden Behauptung einen Allsatz als Prämisse; es wird ja angenommen, daß (für den fixierten Wert n) bei jeder Ziffer m die Beziehung $A(m, n)$ bestehe. Dieses Vorausgesetzte können wir uns nicht in der Vorstellung eigentlich vergegenwärtigen.

Freilich läßt sich in vielen Fällen die genannte Form der Anwendung der vollständigen Induktion vom finiten Standpunkt motivieren. Das ist z.B. dann der Fall, wenn beim Beweis des Bestehens von $A(m, n + 1)$ für ein bestimmtes m die Voraussetzung des Bestehens von $A(z, n)$ für beliebige z nur

Zur Anwendung kommt
in solcher Weise ~~angewandt wird~~, daß eine durch m und n bestimmte endliche Anzahl von Beziehungen

$$(1) \quad \underline{A}(\underline{k}_1, \underline{n}), \dots, \underline{A}(\underline{k}_r, \underline{n})$$

benutzt wird, worin k₁, ..., k_r gewisse aus m und n zu ermittelnde ⁿZiffern sind.

In diesem Falle kommt ja der Beweis des hypothetischen Satzes mit der ~~problematischen~~ Allprämisse darauf hinaus, daß man zeigt, daß sich die Feststellung der Beziehung A(m, n + 1) (für die fixierten Ziffern m, n) zurückführen läßt auf die Feststellungen der Beziehungen (1), und damit ist ein Regreß gegeben, der die Feststellung von A(m, n + 1) in einer begrenzten Zahl von Schritten auf die Feststellung von Beziehungen

$$\underline{A}(\underline{z}_1, 1), \dots, \underline{A}(\underline{z}_s, 1)$$

zurückführt, und für diese wird durch den anfänglichen Beweis des Bestehens von A(m, 1) für beliebige m das allgemeine Verfahren gegeben.

Diese Art der Rechtfertigung der erweiterten Form der vollständigen Induktion mit Allsätzen als Prämissen ist jedoch nicht generell anwendbar. Insbesondere erwächst eine Schwierigkeit aus dem Umstand, daß derartige erweiterte Induktionen in komplizierter Weise ineinandergeschachtelt sein können. Wir wollen einen typischen Fall dieser Art näher betrachten. Es handelt sich da^{bei} um einen konstruktiv behandelbaren Teil der CANTORSchen Theorie der transfiniten Ordinalzahlen.